

Corrigé
du devoir libre n°5

Exercice 1.

1. Nous avons pour tout λ réel, P et Q dans $\mathbf{E}$

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q)(X) &= (-1 + X)(\lambda P + Q)'(X) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda(-1 + X)P'(X) - \lambda P(X) + (-1 + X)Q'(X) - Q(X) \\ &= \lambda f(P)(X) + f(Q)(X) \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est une application linéaire. f est un endomorphisme car

$$\deg f(P)(X) = \deg((-1 + X)P'(X) - P(X)) \leq \deg P(X).$$

2. (a) Nous avons en utilisant la définition de f

$$\begin{aligned} f(1) &= (-1 + X)1'(X) - 1 = -1 \\ f(X) &= (-1 + X)X' - X = -1 \\ f(X^2) &= (-1 + X)(X^2)' - X^2 = -2X + X^2 \\ f(X^3) &= (-1 + X)(X^3)' - X^3 = -3X^2 + 2X^3 \\ f(X^4) &= (-1 + X)(X^4)' - X^4 = -4X^3 + 3X^4 \end{aligned}$$

Nous obtenons la matrice M de f dans la base B_0

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (b) On note S_λ l'ensemble de solutions du système $MX = \lambda X$, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ puisque $S_\lambda = \ker(f - \lambda \text{id}_{\mathbf{E}})$.

- Pour $\lambda = -1$ on trouve :

$$S_{-1} = \{(a, 0, 0, 0, 0)/a \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(1, 0, 0, 0, 0)\}$$

- Pour $\lambda = 0$ on trouve :

$$S_0 = \{(-b, b, 0, 0, 0)/b \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(-1, 1, 0, 0, 0)\}$$

- Pour $\lambda = 1$ on trouve :

$$S_1 = \{(-c, 2c, c, 0, 0)/c \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(-1, 2, 1, 0, 0)\}$$

- Pour $\lambda = 2$ on trouve :

$$S_{-1} = \{(-d, 3d, -3d, d, 0)/d \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(-1, 3, -3, 1, 0)\}$$

- Pour $\lambda = 3$ on trouve :

$$S_{-1} = \{(e, -4e, 6e, -4e, e)/e \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(1, -4, 6, -4, 1)\}$$

Il est clair qu'ils sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{E}$ à une dimension (de dimension 1).

- (c) • $\ker f = S_0 = \text{vect}\{(-1, 1, 0, 0, 0)\}$, donc $(-1, 1, 0, 0, 0) = -1 + X$ forme une base de $\ker f$.
 • Soit $Y = (A, B, C, D, E) \in \text{Im} f$, alors il existe $X = (a, b, c, d, e) \in E$ tel que $MX = Y$

$$MX = Y \iff \begin{cases} A &= -a - b \\ B &= -2c \\ C &= c - 3d \\ D &= 2d - 4c \\ E &= 3e \end{cases}$$

et nous réduisons à l'aide des opérations élémentaires $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$, $L_4 \leftarrow 3L_4 + L_3$, $L_5 \leftarrow 4L_5 + L_4$ qui donnent comme résultat :

$$\begin{cases} A &= -a - b \\ B &= -2c \\ B + C &= -6d \\ B + 2C + D &= -12e \\ B + 2C + 3D + 4E &= 0 \end{cases}$$

Nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \text{Im} f &= \{(A, B, C, D, E)/B + 2C + 3DE = 0\} \\ &= \{A, -2C - 3D - 4E, C, D, E)/A, C, D, E \in \mathbb{R}\} \\ &= \{A(1, 0, 0, 0, 0) + C(0, -2, 1, 0, 0) + D(0, -3, 0, 1, 0) + E(0, -4, 0, 0, 1)/A, C, D, E \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{vect}\{1, 0, 0, 0, 0), (0, -2, 1, 0, 0), (0, -3, 0, 1, 0), (0, -4, 0, 0, 1)\} \\ &= \text{vect}\{1, -2X + X^2, -3X + X^3, -4X + X^4\} \end{aligned}$$

Nous vérifions le théorème du rang : $\dim(\text{Im} f) + \dim(\ker f) = 4 + 1 = 5 = \dim \mathbf{E}$

- (a) On trouve $f^2(P)(X) = f(f(P))(X) = (-1 + X)^2 P''(X) - (-1 + X)P'(X) + P(X)$
 (b) La matrice $N = M(f^2)$ de f^2 dans la base $\mathcal{B}_0$ est

$$N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$X = (a, b, c, d, e) \in \ker f^2 \iff NX = 0$, on trouve :

$$\ker f^2 = \text{vect}\{(-1, 1, 0, 0, 0)\} = \ker f$$

Remarque : de manière générale, on montre que pour tout endomorphisme que

$$\ker f \subset \ker f^2 \quad \text{et} \quad \text{Im} f^2 \subset \text{Im} f$$

D'après ci dessus et le théorème du rang, nous avons aussi $\text{Im} f^2 = \text{Im} f$.

3. L'ensemble de solutions de l'équation différentielle $(-1+x)^2 y'' + (1-x)y' + y = 0$ n'est autre que le noyau de f^2 . Donc, d'après l'étude précédente, les seules solutions **dans E** sont de la forme $y(x) = \alpha(-1+X)$, avec α réel arbitraire.

Exercice 2.

1. Puisque on a

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = -2y \neq \frac{\partial}{\partial x}(-x^2) = -2x$$

la forme différentielle ω n'est pas exacte

2. (a) ω' est exacte si et seulement si

$$\frac{\partial}{\partial y}(\omega(x, y) \times f[u(x, y)]) = \frac{\partial}{\partial x}(\omega(x, y) \times f[u(x, y)])$$

Ceci est équivalent à

$$2(x-y)f(u(x, y)) + yx^2 - y^2xf'(u(x, y)) = 0$$

ou encore

$$(x-y)[2f(u) + xyf'(u)] = 0$$

Donc ω' est exacte si et seulement si $2f(u) + uf'(u) = 0$

- (b) La solution générale de (1) est : $f(u) = \frac{c}{u^2}$ avec c constante arbitraire

$$\omega' = d\varphi \iff -\frac{c}{x^2}dx - \frac{c}{y^2}dy = d\varphi \iff \frac{c}{x} + \frac{c}{y} = \varphi(x, y) + k. \text{ avec } k \text{ constante.}$$

Donc $\varphi(x, y) = \frac{A}{x} + \frac{A}{y} + B$ avec A et B des constantes. $\varphi(1, 1) = 0 \implies B = -A$, d'où

$$\varphi(x, y) = A\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 1\right)$$

- (c) $\omega(x, y) = 0 \iff d\varphi = 0 \iff \varphi(x, y)$ est une fonction constante, ce qui entraîne $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = C$ avec C constante.

3. (a) $\omega(x, y) = 0 \iff y^2dx + x^2dy = 0 \iff x^2\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \iff x^2y' + y^2 = 0$

- (b) L'équation (2) est une équation différentielle du premier ordre **non linéaire** dont la solution générale est : $y(x) = \frac{1}{k-x}$ avec k une constante arbitraire.

Il est clair que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = k$

Exercice 3.

On pose $g(u, v) = f(x, y)$, les calculs donnent :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \alpha^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\frac{\partial g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

Donc

$$(*) \quad \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\alpha^2 \frac{\partial g}{\partial u \partial v} = 0$$

d'où $g(u, v) = \phi(u) + \psi(v)$ avec ϕ et ψ des fonctions à une seule variable, ce qui donne la solution générale de (*) : $f(x, y) = \phi(x + \alpha y) + \psi(x - \alpha y)$.

• • • • •